Exercices d'algorithmique - Entraînement

Exercice 1 - *Matrice concordante*

Soient deux tableaux de n entiers positifs L et C. On dit qu'une matrice M n lignes, n colonnes, composée de 0 et de 1, *concorde* avec L et C lorsque pour tout i,

- $L[i]$ est égal au nombre de 1 dans la ligne i de la matrice M
- $C[i]$ est égal au nombre de 1 dans la colonne i de la matrice M

1. Proposer un algorithme glouton qui, étant données L et C deux tableaux de taille n, renvoie une matrice M de taille $n \times n$ composée de 0 et de 1 qui concorde avec L et C, ou signale une erreur lorsqu'il n'existe pas de telle matrice.
2. Prouver, (ou corriger ...) votre algorithme précédent.

Exercice 2 - *Recherche de somme maximale*

On considère un triangle de nombre, que l'on parcourt de son sommet jusqu'à sa base, en sommant les nombres rencontrés. On ne peut passer d'un nombre donné qu'à un nombre adjacent sur la ligne inférieure. On cherche à déterminer la somme maximale possible.

```
      7
    1   6
  9   5   3
4   2   4   3
```

1. Quelle est la somme maximale possible pour le triangle ci-dessus ?
2. Proposer un algorithme efficace permettant de répondre au problème.

Exercice 3 - *Répartition de skis*

On considère n personnes dont les tailles sont dans un tableau P, et n paires de ski dont les tailles sont dans un tableau S. On cherche à attribuer une paire de skis à chaque skieur, de sorte à minimiser la somme des écarts entre les tailles des skis et les tailles des personnes. On cherche donc σ, une permutation de $[\![1;n]\!]$, qui minimise $\sum_{i=1}^{n} |P[i] - S[\sigma(i)]|$

1. Proposer un algorithme efficace (et prouver qu'il est correct) permettant de trouver à quel skieur attribuer quelle paire de skis.

Exercice 4 - *Multiplications matricielles*

Soient A et B, deux matrices de tailles respectives $a \times b$ et $c \times d$.
1. A quelle condition nécessaire et suffisante, le produit AB est-il possible ? Quelle est la taille de la matrice produit AB ? Combien de multiplications ont-elles été nécessaires pour calculer ce produit ?
Sachant que le produit matriciel est associatif (mais pas commutatif !), le produit ABC peut être calculé de deux manières : $(AB)C$ ou $A(BC)$, qui ne nécessitent pas a priori le même nombre de multiplications.
2. Pour les matrices A de taille $n \times n$, B de taille $n \times n$, et C de taille $n \times 1$, comparer le nombre de multiplications pour le produit $(AB)C$ et pour le produit $A(BC)$.
On considère une suite de matrices M_0, M_1, M_2, ... M_{n-1} de tailles respectives $m_0 \times m_1$, $m_1 \times m_2$, ... , $m_{n-1} \times m_n$.
3. Proposer un algorithme efficace permettant de trouver le nombre minimal de multiplications à réaliser pour calculer le produit $M_0M_1M_2...M_{n-1}$

Un peu plus ludique ...

Exercice 5 - *Ordre de grandeur*

1. Elon Musk décide d'envoyer tous les humains sur Mars. Grâce à un nouvelle technologie de cryogénisation, il est possible de les faire voyager en les entassant les uns sur les autres. Il dispose d'une flotte de 100 navettes SpaceX nouvelle génération ayant chacune une charge utile de 1000m^3. Dans combien de temps tous les humains auront-ils rejoint Mars ?

Exercice 6 - *La fausse pièce*

1. Vous avez 9 pièces de monnaie visuellement identiques. L'une d'elle est fausse, et un peu plus légère que les autres. Vous disposez d'une balance à deux plateaux (balance Roberval). Identifiez la fausse pièce en 2 pesées maximum.
2. Vous avez 12 pièces de monnaie visuellement identiques. L'une d'elle est fausse, de poids légèrement différent des autres. Vous disposez d'une balance à deux plateaux (...). Identifiez la fausse pièce en 3 pesées maximum.