Fiche TD2 : Sémantique du calcul propositionnel

Exercice 1 *Autre définition d'une équivalence*
Montrer que $F \equiv G$ si et seulement si $F \Leftrightarrow G$ est une tautologie.

Exercice 2 *Formes normales disjonctives*

1. Donner une forme normale disjonctive en p, q, r pour la formule F dont la table de vérité est :

p	q	r	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2. Donner une forme normale disjonctive pour les formules suivantes :

   a) $(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$.
   b) $p \Leftrightarrow q$.
   c) $p \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$.
   d) $(p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p)$.
   e) $p \Rightarrow (p \vee q)$.

Exercice 3 *Forme normale conjonctive*
Donner une forme normale conjonctive pour la formule :

$$F = (p \wedge (q \Rightarrow r)) \vee (q \wedge r)$$

Exercice 4 *Les parents inquiets*

Les parents d'un étudiant s'inquiètent de ce qu'il fera le soir précédant un examen. Révisera-t-il ? Se couchera-t-il tôt ? Sortira-t-il avec ses amis ? Aura-t-il une bonne note ? Ils savent que :

(1) S'il sort, il se couchera tard.

(2) Il révisera ou il sortira, peut être les deux.

(3) S'il ne révise pas il aura une mauvaise note.

(4) S'il révise, il ne se couchera pas tôt.

1. Traduire chacune de ces assertions en une formule du calcul propositionnel en utilisant en tout quatre variables propositionnelles dont on explicitera la signification.
2. Par le calcul, donner une forme disjonctive de chacune des formules précédentes.
3. En déduire une formule F sous FNC qui traduit ce que savent les parents. Remarquez que par hypothèse, on sait que cette formule est vraie.
4. En dressant la table de vérité de F, montrer que les parents peuvent répondre à l'une de leurs questions.
5. Il apprennent par la suite que leur enfant a eu une bonne note. Peuvent-ils répondre à leurs deux dernières questions ?

Exercice 5 *Une FNC peut être très grande...*

1. Donner, en développant le $\vee$, une FNC pour $F = (x_{1,0} \wedge x_{1,1}) \vee (x_{2,0} \wedge x_{2,1})$.
2. Quelle est la taille de F ? Et celle de la FNC que vous avez trouvé pour F ?
3. Reprendre les deux questions précédentes pour $F = (x_{1,0} \wedge x_{1,1}) \vee (x_{2,0} \wedge x_{2,1}) \vee (x_{3,0} \wedge x_{3,1})$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $F_n = (x_{1,0} \wedge x_{1,1}) \vee ... \vee (x_{n,0} \wedge x_{n,1})$.
   a) Quelle est la taille de F_n ?
   b) Montrer par récurrence que $G_n = \bigwedge_{f:[\![1,n]\!]\mapsto\{0,1\}} (x_{1,f(1)} \vee x_{2,f(2)} \vee ... \vee x_{n,f(n)})$ est une FNC pour F_n.
   c) Combien y a-t-il de fonctions allant de $[\![1,n]\!]$ dans $\{0,1\}$?
   d) En déduire le nombre de connecteurs $\wedge$ dans G_n ainsi que le nombre de connecteurs $\vee$ dans G_n.
   e) Quelle est la taille de G_n ?
   f) Comparer les tailles de F_n et de G_n. Qu'en pensez vous ?

Exercice 6 *Substitutions*

1. Donner les formules résultant des substitutions suivantes :
   a) $F[p \vee q/p]$ où $F = \neg p \wedge q$.
   b) $F[\top/q]$ où $F = p \vee (q \Rightarrow (\neg q \wedge p))$.
   c) $F[r \vee (p \vee \neg s)/p]$ où $F = r \wedge s$.
2. Soit F, F', G des formules du calcul propositionnel et p une variable propositionnelle. Montrer que :
   a) Si F est une tautologie alors $F[G/p]$ est aussi une tautologie.
   b) Si $F \equiv F'$ alors $F[G/p] \equiv F'[G/p]$.
   c) Si $F \equiv F'$ alors $G[F/p] \equiv G[F'/p]$. Remarquez qu'on utilise souvent cette dernière propriété : c'est celle qui - par exemple - permet de dire que pour montrer que $\neg(F \wedge F') \equiv \neg F \vee \neg F'$, il suffit de montrer que $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ où p et q sont des variables propositionnelles.

Exercice 7 *Conséquences logiques*
Parmi les inférences suivantes, lesquelles sont valides ?

1. $\{p, q\} \models p \wedge q$
2. $\{p, q\} \models p \Rightarrow q$
3. $\emptyset \models p \vee \neg p$
4. $\{j, \neg s, \neg b \vee s\} \models \neg s \wedge (j \vee b)$.
5. $\{j, \neg s, j \vee b\} \models \neg b \vee s$.

Exercice 8 *Conséquences, tautologies et antilogies*
Soit Γ un ensemble fini et satisfiable de formules, F une formule telle que F est conséquence de Γ et G une formule qui n'est pas conséquence de Γ.

1. Si T est une tautologie, a-t-on $\Gamma \cup \{T\} \models F$? A-t-on $\Gamma \cup \{T\} \models G$?
2. Si A est une antilogie, a-t-on $\Gamma \cup \{A\} \models F$? A-t-on $\Gamma \cup \{A\} \models G$?