Fiche TD3 : Satisfiabilité

Exercice 1 *Une autre méthode pour montrer une conséquence logique*

Soit $\Sigma = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$ un ensemble fini non vide de formules et F une formules du calcul propositionnel. On note $H = \bigwedge_{i=1}^{n} H_i$.

Montrer que $\Sigma \models F$ si et seulement si $(H \Rightarrow F)$ est une tautologie.

Exercice 2 *S'entraîner avec l'algorithme de Quine*

1. Dérouler l'algorithme de Quine sur les formules suivantes :
   a) $F = ((p \wedge q) \vee (\neg r \Rightarrow s)) \Leftrightarrow (((p \wedge \neg r) \Rightarrow (s \vee q)) \wedge t)$
   b) $F = ((s \Rightarrow (b \vee t)) \wedge ((b \vee a) \Rightarrow (r \wedge m)) \wedge \neg r) \Rightarrow (s \Rightarrow t)$
   c) F est la conjonction de $((a \wedge b) \vee (\neg c \Rightarrow d))$, $\neg(a \wedge e)$, f et $(d \vee \neg e)$.
2. Pour chacun des cas précédents, dire si F est une antilogie, une tautologie ou si F est satisifiable. Dans le cas où F est satisfiable, dire combien F a de modèles et en donner un exemple.

Exercice 3 *Modélisation d'une bataille navale*

On cherche à deviner la position de bateaux sur une (petite) grille de bataille navale à deux lignes, indexées par a et b et trois colonnes, numérotées 1, 2 et 3. On dispose des informations suivantes :

(1) Il y a au moins un bateau sur la ligne b.

(2) Il y a au moins un bateau sur la ligne a.

(3) Il n'y a pas deux bateaux sur la même colonne.

(4) Il n'y a pas de bateau en $(b, 1)$.

(5) S'il y a un bateau sur la ligne a alors il n'y en a pas en $(b, 3)$.

Pour $x \in \{a, b\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, on note x_i la proposition : il y a un bateau dans la case de coordonnées (x, i).

1. Modéliser les cinq affirmations ci dessus par une formule du calcul propositionnel.
2. En déduire une formule F décrivant la situation sur le plateau dans l'énoncé.
3. Par l'algorithme de Quine, donner les modèles de F et les dessiner.

En pratique, un plateau de bataille navale comporte 10 lignes et 10 colonnes. Pour deviner où sont les bateaux adverses, on pourrait procéder de la même façon que dans l'exemple miniature des premières questions : on utilise les connaissances qu'on a sur la partie pour modéliser la situation par une formule F du calcul propositionnel, puis on cherche tous les modèles de cette formule. Chaque modèle donne une configuration possible du plateau de l'adversaire.

4. Combien faut-il de variables propositionnelles pour modéliser une situation dans ce jeu ?
5. Combien de lignes aurait la table de vérité de F ?
6. Supposons qu'on dispose d'un ordinateur capable de faire 2 milliards d'opérations en une seconde et que remplir une ligne d'une table de vérité compte pour une opération. Combien de temps faudrait-il pour calculer tous les modèles de F ?

Remarquez que l'on peut utiliser des méthodes similaires pour modéliser d'autres jeux.

Exercice 4 *Parcoursup très simplifié*

On dispose de trois étudiants, Adam, Bruno et Charles et de trois écoles numérotées de un à trois qui chacune dispose d'une place pour accueillir un étudiant. L'objectif de l'exercice est d'associer - si c'est possible - un étudiant à chaque école de sorte que les préférences des étudiants et des écoles soient respectées. On doit avoir :

(1) Chaque école reçoit un étudiant et chaque étudiant va dans une école.

(2) Aucune école ne reçoit deux étudiants.

(3) Aucun élève ne peut aller dans deux écoles à la fois.

(4) Adam souhaite aller dans l'école 1 ou l'école 2.

(5) Bruno souhaite aller dans l'école 3.

(6) Charles souhaite aller dans l'école 1 ou l'école 3.

(7) L'école 1 veut bien accepter Bruno ou Charles.

(8) L'école 2 veut bien accepter Adam ou Charles.

(9) L'école 3 veut bien accepter Adam ou Bruno.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note a_i la proposition "Adam est apparié à l'école i", b_i la proposition "Bruno est apparié à l'école i" et c_i la proposition "Charles" est associé à l'école i". Ainsi, la traduction du souhait d'Adam (cad proposition la (4)) peut se traduire $a_1 \vee a_2$.

1. Traduisez chaque contrainte en une formule du calcul propositionnel sous FNC.
2. En déduire une FNC exprimant l'ensemble des contraintes du problème.
3. Déterminer s'il est possible de satisfaire à toutes les contraintes du problème et, si oui, donner un appariement possible entre les étudiants et les écoles.

Exercice 5 *Répartition de salles*

L'administration d'un lycée cherche à répartir ses quatre classes dans trois salles sur le créneau de 8h à 10h avec les contraintes suivantes :

(1) Deux classes ne peuvent pas avoir cours dans la même salle en même temps.

(2) La classe 1 n'a pas cours à 8h et a cours à 9h dans la salle 1.

(3) La classe 2 a une heure de cours dans la salle 2.

(4) La classe 3 a cours à 8h et à 9h.

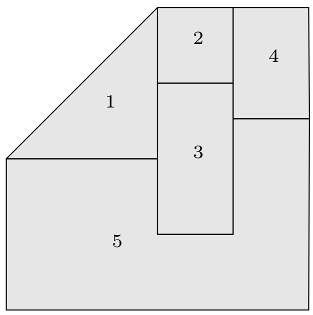
(5) La classe 4 a cours dans la même salle à 8h et à 9h.

Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ et $h \in \{8, 9\}$, on note $x_{i,j,h}$ la proposition "la classe i a cours dans la salle j à h heure".

1. Traduire les contraintes du problèmes par des formules du calcul propositionnel sous FNC et en déduire une formule F sous FNC qui modélise la situation de l'énoncé.
2. Vérifier si F est satisfiable. Si oui, donner une répartition possible des classes dans les salles.

Exercice 6 *Un peu de coloriage*

On considère la carte suivante :



On cherche à colorier cette carte avec trois couleurs : rouge (r), bleu (b) et vert (v). Pour $x \in \{r, v, b\}$ et $i \in 1, 2, 3, 4, 5$, on notera x_i la variable propositionnelle "la zone i est coloriée avec la couleur x". On souhaite satisfaire les contraintes suivantes :

(1) Chaque zone doit être coloriée.

(2) Une même zone ne peut pas être coloriée avec deux couleurs différentes.

(3) Deux zones adjacentes ne peuvent pas avoir la même couleur.

1. Traduire les contraintes du problème en formules du clacul propositionnel.
2. En déduire que la carte est coloriable en satisfaisant les contraintes ssi une certaine formule F qu'on explicitera est satisfiable.
3. Dire si le problème posé admet une solution.