Fiche TD1 : Syntaxe et sémantique du calcul propositionnel

Exercice 1 *Un peu de syntaxe*

1. Parmi les suites de symboles suivants, lesquelles sont des formules propositionnelles (on ne s'autorise dans cet exercice aucune simplification) ?

   a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
   b) $(\neg((\neg p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow \neg q)$
   c) $(q \Rightarrow (\neg p))$
   d) $(((p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p))$

2. Pour chaque suite de symboles qui est une formule donner :

   a) Son arbre syntaxique.
   b) Sa hauteur.
   c) L'ensemble de ses sous formules.

Exercice 2 *Traductions*

On note b la proposition "la diode bleue s'allume", r la proposition "la diode rouge s'allume", v la proposition "la diode verte s'allume" et p la proposition "l'appareil est en panne".

1. Traduire par une formule de la logique propositionnelle les propositions suivantes :

   a) La diode rouge et la diode bleue s'allument.
   b) Si la diode rouge s'allume alors l'appareil est en panne.
   c) L'appareil est en panne mais ni la diode bleue ni la diode verte ne s'allument.
   d) La diode verte ne s'allume que si la diode bleue est éteinte.
   e) La diode rouge s'allume si la diode verte s'allume ou si l'appareil est en panne.
   f) Quand la diode verte s'allume, soit la diode bleue soit la diode rouge s'allume.

2. Traduire en langage naturel de la manière la plus claire possible les formules suivantes :

   a) $(b \vee r) \Rightarrow (p \wedge \neg v)$.
   b) $v \Leftrightarrow \neg p$.
   c) $(v \wedge r) \vee p$
   d) $\neg v \Rightarrow (r \vee b)$

Exercice 3 *L'énigme des sphinx*

Un voyageur arrive à une bifurcation dans le désert. Chacun des deux chemins peut mener soit à une oasis, soit se perdre dans le désert ; au mieux ils conduisent tous deux à une oasis, au pire, tous les deux se perdent dans le désert. Chaque chemin est gardé par un sphinx.

(1) Le sphinx de droite annonce : "Au moins une des pistes mène à une oasis."

(2) Le sphinx de gauche déclare "La piste de droite se perd dans le désert."

(3) Le voyageur sait par ailleurs que : soit les deux sphinx disent la vérité, soit ils mentent tous les deux.

1. Introduire deux variables propositionnelles (dont on précisera la signification) permettant de modéliser le problème et donner une formule du calcul propositionnel pour décrire chacune des trois données de l'énigme.

2. En dressant la table de vérité de la formule correspondant à la donnée (3), dire si le voyageur peut espérer atteindre une oasis et si oui, indiquer le chemin qu'il doit prendre.

Exercice 4 *Valuations partielles*

On considère les formules suivantes : $F = p \wedge (\neg q \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ et $G = (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

1. Soit φ une valuation. Déterminer si c'est possible $\varphi(F)$ et $\varphi(G)$ dans les cas suivants :

a) $\varphi(p) = 0$ et $\varphi(q) = 1$.

b) $\varphi(p) = 0$.

c) $\varphi(q) = 1$.

2. Ces deux formules sont elles satisfiables ? Sont elles des tautologies ? Sont elles équivalentes ?

3. L'ensemble $\{F, G\}$ est-il satisfiable ?

Exercice 5 *Associativité de* $\Rightarrow$

1. Dresser les tables de vérité des formules $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ et $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

2. Le connecteur $\Rightarrow$ est il associatif ?

Exercice 6 *Tautologies, ou quelques principes mathématiques*
Dire si les formules suivantes sont des tautologies :

1. $p \vee \neg p$ (tiers exclus)

2. $\neg(p \wedge \neg p)$ (non contradiction)

3. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$ (commutativité du $\vee$)

4. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (vrai est impliqué par tout)

5. $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (faux implique tout)

6. $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (raisonnement par l'absurde)

7. $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow p$ (raisonnement par l'absurde)

8. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitivité de $\Rightarrow$)

Exercice 7 *Tautologie et satisfiabilité*

1. Montrer que F est une tautologie si et seulement si $\neg F$ est non satisfiable.

2. On suppose qu'on dispose d'un algorithme qui permet de vérifier si une formule est une tautologie. En déduire un algorithme permettant de savoir si une formule est satisfiable.

Exercice 8 *Equivalences*
On note F, G, H des formules du calcul propositionnel. Montrer les équivalences suivantes.

1. $F \vee G \equiv G \vee F$ et $F \wedge G \equiv G \wedge F$ (commutativité)

2. $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$ et $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$ (associativité)

3. $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ et $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ (distributivité)

4. $\bot \vee F \equiv F$ et $\top \wedge F \equiv F$ (éléments neutres)

5. $F \vee F \equiv F$ et $F \wedge F \equiv F$ (idempotence)

6. $F \vee (F \wedge G) \equiv F$ et $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ (absorption)

7. $F \vee \top \equiv \top$ et $F \wedge \bot \equiv \bot$ (éléments absorbants)

8. $F \vee \neg F \equiv \top$ et $F \wedge \neg F \equiv \bot$

9. $\neg\neg F \equiv F$ (involution)

10. $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$ et $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ (loi de De Morgan)

11. $F \Rightarrow G \equiv \neg G \Rightarrow \neg F$ (contraposition)

12. $F \Rightarrow (G \Rightarrow H) \equiv (F \wedge G) \Rightarrow H$ (curryfication)

Exercice 9 *Différentes formulations*

Caractériser chacune des notions d'équivalence, tautologie, conséquence et satisfiabilité à l'aide d'une des trois autres.

Exercice 10* *Autour du principe d'induction*

1. Identifier le problème dans la démonstration suivante :

   Soit un sac de billes. Certaines sont rouges, d'autres bleues. On va montrer que quel que soit le nombre de billes que l'on tire du sac, elles ont toutes la même couleur. On procède par récurrence sur le nombre n de billes tirées. Pour $n = 1$ c'est clair : si on ne tire qu'une bille, toutes les billes tirées ont la même couleur. Tirons maintenant $n+1$ billes et considérons deux sous-groupes de billes. Les n premières billes tirées sont toutes de la même couleur c_1 par hypothèse de récurrence. De même, les n dernières billes tirées sont de la même couleur c_2. Les billes qui sont dans les deux sous-groupes ont une couleur c qui doit être égale à la fois à c_1 et c_2. Par conséquent $c_1 = c_2$ et toutes les billes ont la même couleur.

2. En utilisant le principe de récurrence simple, démontrer le principe de récurrence forte sur les entiers :

$$(\forall n, (\forall m, m < n \Rightarrow P(m)) \Rightarrow P(n)) \Rightarrow \forall n, P(n)$$

3. Un ordre sur un ensemble E est bien fondé si et seulement si tout sous ensemble non vide de E possède un élément minimal (un élément est minimal dans E si il n'existe pas d'élement strictement plus petit dans E). Soit $\leq$ un ordre bien fondé sur un ensemble E et P une proposition sur les éléments de E. Montrer que :

$$(\forall x \in E, ((\forall y \in E, y < x \Rightarrow P(y))) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall x \in E, P(x)$$