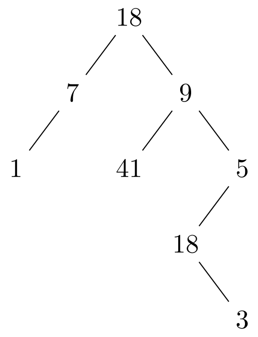
Fiche TD12 : Arbres binaires

Exerice 1 *Vocabulaire*

On considère l'arbre binaire A (dont les noeuds sont étiquetés par des entiers) suivant :



1. Calculer la taille, la hauteur, le nombre de feuilles et de noeuds internes de A.
2. Quel est le père du noeud 18 le plus profond ?
3. Combien le noeud 9 a-t-il de fils ? Et le noeud 7 ?
4. Identifier le fils gauche de A et le fils droit de l'arbre enraciné au noeud 9. Indiquer lequel des deux est le plus haut. Sont-ils complets ?
5. Quels sont les fils du frère de la racine du sous-arbre droit de A ?

Exercice 2 *Implémentations*

On décide dans un premier temps de cet exercice d'implémenter un arbre binaire dont on a numéroté les noeuds (non vides) à partir de 1 à l'aide d'un tableau dont la case i contient le triplet (étiquette du noeud numéro i, numéro du fils gauche de i, numéro du fils droit de i). Par convention Δ représente le noeud vide.

1. Dessiner l'arbre binaire enraciné au noeud numéro 6 correspondant au tableau suivant :

numéro noeud	étiquette	fils gauche	fils droit
1	12	7	3
2	15	8	Δ
3	4	10	Δ
4	10	5	9
5	2	Δ	Δ
6	18	1	4
7	7	Δ	Δ
8	14	6	2
9	21	Δ	Δ
10	5	Δ	Δ

2. Donner le tableau représentant l'arbre de l'exercice 1 en numérotant ses noeuds de telle sorte à ce que chaque noeud porte le numéro obtenu en lisant les noeuds de l'arbre de gauche à droite et de haut en bas (par exemple, la racine portera le numéro 1 et le noeud 5 le numéro 6).

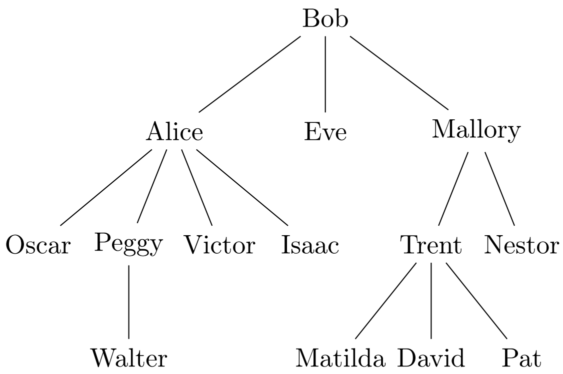
Dans la suite de cet exercice, on considère uniquement des arbres complets que l'on représentera systématiquement par un tableau. En particulier, on défini l'arbre binaire complet A à partir de la représentation ci-dessous :

c	a	r	a	m	b	a	e	n	c	o	r	e	r	a	t	e

3. Donner la taille et la hauteur de A. De manière générale, comme calculer ces quantités à partir du tableau représentant un arbre binaire complet ?
4. Pour chacune des profondeurs entre 0 et la hauteur de A, indiquer quels sont les étiquettes des noeuds à cette profondeur. Comment calculer ces dernières de manière générale ?
5. Dessiner l'arbre A. Est-il parfait ? Pouvait-on le déduire avant de le dessiner ? Indiquer comment déterminer si un arbre complet est parfait à partir du tableau le représentant.

Exercice 3 *Arbres non binaires*

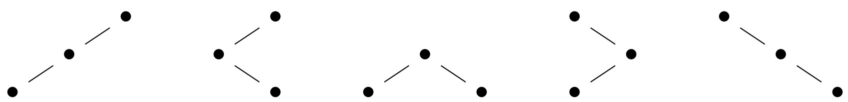
On considère l'arbre A ci-dessous, étiquetté par des prénoms célèbres en cryptographie.



1. Donner la taille, la hauteur et la liste des feuilles de A.
2. Quelle est l'arité du noeud étiqueté Trent ?
3. A est-il un arbre ternaire ?
4. Lister tous les noeuds à profondeur 3 dans A.
5. Quelle est la racine du sous-arbre de A de hauteur 2 dont une feuille n'a aucun frère ?
6. Transformer A en arbre binaire en utilisant l'algorithme left-child, right-sibling.

Exercice 4 *Nombre d'arbres binaires*

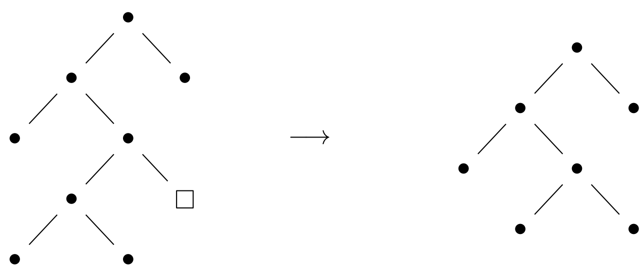
On appelle *squelette d'arbre binaire* tout arbre binaire dans lequel on ne tient pas compte des étiquettes. Dans la suite, on confondra "arbre binaire" et "squelette d'arbre binaire". Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le nombre (de squelettes) d'arbres binaires à n noeuds. Ainsi, $c_0 = 1$ (seul l'arbre vide a 0 noeuds), $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ et les $c_3 = 5$ (squelettes d')arbres binaires à 3 noeuds sont les suivants :



1. Déterminer c_4 et dessiner tous les squelettes d'arbres correspondants.
2. Justifier cette affirmation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence de la question précédente et ayant pour premier terme $c_0 = 1$ est une suite célèbre appelée la suite de Catalan. Déterminer une expression pour son terme général est un problème généralement résolu en étudiant la série génératrice associée à $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On propose ci-dessous une méthode alternative.

3. On appelle *arbre binaire strict* un arbre binaire dont tous les noeuds ont exactement deux fils non vides.
   a) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des arbres binaires à n noeuds et l'ensemble des arbres binaires stricts à $n+1$ feuilles.
   b) On introduit la transformation suivante : elle prend en entrée un arbre binaire strict A à $n+1$ feuilles et une feuille de A, élimine cette feuille et remplace son père par le sous-arbre enraciné en son noeud frère. On obtient ainsi un arbre binaire strict à n feuilles. Par exemple, avec l'arbre suivant et suppression de la feuille symbolisée par $\square$, on obtient :



   En s'aidant des propriétés de cette transformation, établir que pour tout $n \geq 1$,
   $$(n+1)c_n = 2(2n-1)c_{n-1}.$$
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Remarque : La suite de Catalan fut d'abord décrite dans le contexte de la triangulation de polygônes convexes réguliers. Elle intervient dans de nombreux problèmes combinatoires : c_n est notamment le nombre de mots de Dyck (rencontrés dans l'exercice 4 du TD9) à $2n$ parenthèses.

Exercice 5 *Parcours*

1. Donner les parcours infixe, préfixe et postfixe de l'arbre de l'exercice 1. Idem pour l'arbre de l'exercice 3.

2. Proposer un pseudo-code itératif permettant d'effectuer le parcours préfixe d'un arbre. On supposera qu'on a accès aux fonctions `fils_gauche`, `fils_droit`, `racine` est `est_vide` permettant respectivement d'extraire le fils gauche (droit) d'un arbre, de récupérer l'étiquette attachée à la racine et de vérifier si un arbre est vide. *Indication : On pourra s'aider d'une pile.*

3. L'ensemble des ascendants d'un noeud N d'un arbre est défini récursivement comme étant l'ensemble de noeuds contenant le père de N et tous les ascendants du père de N. Soit x et y deux noeuds d'un même arbre A. Montrer que, si x précède y dans le parcours préfixe de A et succède à y dans le parcours postfixe de A, alors x est un ascendant de y. La réciproque est-elle vraie ?

4. On peut étendre la notion de parcours préfixe des arbres binaires aux arbres n-aires : le parcours visite alors le noeud puis tous les fils de ce noeud de gauche à droite. Montrer que les parcours préfixes d'un arbre n-aire et de sa représentation left-child, right-sibling coïncident. A-t-on la même propriété pour le parcours postfixe ?

5. Le *parcours hiérarchique* (ou *parcours en largeur*) d'un arbre consiste à parcourir tous les sommets à profondeur i de gauche à droite pour i allant de 0 à la hauteur de l'arbre.

   a) Donner le parcours hiérarchique de l'arbre de l'exercice 3.

   b) Sous les mêmes hypothèses qu'à la question 2, proposer un pseudo-code permettant d'effectuer le parcours hiérarchique d'un arbre. *Indication : On pourra s'inspirer de la question 2 !*

Exercice 6 *Arbres de Fibonacci*

On définit par récurrence la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des arbres de Fibonacci (non étiquetés) de la façon suivante : A_0 et A_1 sont des feuilles et pour tout $n \geq 2$, A_n est l'arbre binaire dont le sous arbre-gauche est A_{n-1} et le sous-arbre droit est A_{n-2}.

1. Dessiner les arbres A_2, A_3, A_4 et A_5.

2. Déterminer en fonction de n la hauteur de A_n, sa taille et son nombre de feuilles.

3. Montrer que les arbres de Fibonacci sont équilibrés, c'est-à-dire que pour tout arbre de Fibonacci, pour tout noeud N dans cet arbre, les hauteurs des fils gauche et droit de l'arbre enraciné en N diffèrent d'au plus 1.