DS1 : Logique

Documents et calculatrice interdits. Le sujet comporte 3 pages. Le devoir sera noté sur 30 points, le barème est donné à titre indicatif et est suceptible d'être modifié. Si vous décelez ce qui vous semble être une incohérence, explicitez la précisément et poursuivez vos raisonnements en prenant en compte la modificiation que vous avez apportée.

Exercice 1 *Cours* (sur 10 points)

On considère l'ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, t\}$ et on introduit F la formule du calcul propositionnel suivante dans laquelle on a simplifié un certain nombre de parenthèses par associativité de $\wedge$:

$$F = (p \vee q) \wedge \neg r \wedge (\neg(p \vee r) \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg s)$$

En particulier, sans simplifications de parenthèses, on aurait :

$$F = ((((p \vee q) \wedge \neg r) \wedge (\neg(p \vee r) \vee q)) \wedge (\neg p \vee \neg s))$$

Parmi les assertions suivantes, dire lesquelles sont vraies en justifiant brièvement :

1. F est de hauteur 5 et de taille 19.
2. F est sous forme normale conjonctive et comporte quatre clauses.
3. L'ensemble des sous-formules de F est $\mathcal{E} = \{p, q, r, s, \neg p, \neg r, \neg s, (p \vee q), (p \vee r), \neg(p \vee r), (\neg p \vee \neg s), (\neg(p \vee r) \vee q), ((p \vee q) \wedge \neg r), (((p \vee q) \wedge \neg r) \wedge (\neg(p \vee r) \vee q))\}$
4. F est satisfiable.
5. F est une tautologie.
6. F admet exactement quatre modèles.
7. La formule $(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s)$ est équivalente à F.
8. L'ensemble de formules $\{F, r\}$ est satisfiable.
9. F est conséquence logique de l'ensemble $\{(p \wedge q), (\neg r \wedge \neg s)\}$.
10. On a : $F[t \Rightarrow r/r] = (p \vee q) \wedge \neg(t \Rightarrow r) \wedge (\neg(p \vee (t \Rightarrow r)) \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg s)$

Exercice 2 *Les tigres et le prisonnier* (sur 5 points)

D'après Le livre qui rend fou *par Raymond Smullyan.*

Le roi d'une contrée lointaine s'inquiète du surpeuplement de ses prisons. Il décide de faire passer trois épreuves aux prisonniers : un prisonnier qui les réussit toutes est libre. Chaque épreuve se déroule ainsi : le prisonnier est amené devant deux pièces fermées. Chacune des pièces peut contenir soit un tigre, soit être vide : au pire des cas, les deux contiennent des tigres, au meilleur des cas, les deux sont vides. Le prisonnier doit ouvrir l'une des deux pièces : si un tigre s'y trouve, il finit dévoré, sinon, il est libre d'affronter l'épreuve suivante. Le roi décide de favoriser les prisonniers disposant d'un sens logique robuste en fixant sur chacune des deux portes une pancarte donnant une information partielle sur le contenu des pièces.

1. Lors de la première épreuve, le prisonnier peut lire sur la porte 1 "Au moins une pièce est vide" et sur la porte 2 "Il y a un tigre dans l'autre pièce". Le roi - qui est incapable de mentir - affirme au prisonnier que les deux pancartes disent soit toutes les deux la vérité, soit mentent toutes les deux.
   a) Traduire les informations données par les pancartes et le roi en formules du calcul propositionnel qui utilisent deux variables propositionnelles dont on précisera la signification.
   b) En dressant une table de vérité, indiquer le contenu des deux pièces.
2. Lors de la deuxième épreuve, le prisonnier constate que les deux pancartes affirment "Les deux pièces sont vides". Le roi - toujours incapable de mentir - informe le prisonnier que la pancarte de la porte 1 dit la vérité si la pièce 1 est vide (et ment sinon) et que la pancarte de la porte 2 dit la vérité si la pièce 2 contient un tigre (et ment sinon).

a) Traduire les informations données par les pancartes et le roi en formules du calcul propositionnel.

b) En dressant une table de vérité, indiquer au prisonnier quelle(s) porte(s) choisir.

3. Lors de la dernière épreuve, le roi donne exactement la même information - véridique - au prisonnier que dans la question 2. Sur la porte 1 on lit "Choisis bien quelle pièce ouvrir, ça a de l'importance !" et sur la porte 2 "Tu ferais mieux de choisir l'autre pièce !"

   a) Modéliser à nouveau cette énigme par des formules du calcul propositionnel.

   b) En dressant une table de vérité, indiquer au prisonnier quelle(s) portes(s) choisir pour retrouver la liberté.

Exercice 3 *Transformation de Tseitin* (sur 15 points)

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant, qu'on appellera le théorème T :

Pour toute formule F du calcul propositionnel, il existe une formule $T(F)$ en forme normale conjonctive, de taille linéaire en la taille de F et telle que F et $T(F)$ sont équisatisfiables (cad, F est satisfiable si et seulement si $T(F)$ est satisfiable.)

1. Montrer que les formules $(p \vee q)$ et $(p \wedge q)$ sont équisatisfiables sans être équivalentes.

On va commencer par démontrer le théorème T pour les formules ne faisant intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$. Jusqu'à la question 8. incluse, on supposera donc que les formules du calcul propositionnel considérées ne font intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$. Soit F une formule du calcul propositionnel qui ne fait intervenir que $\neg$ et $\vee$. On note $|F|$ la taille de F, $SF(F)$ l'ensemble des sous formules de F, $V(F)$ l'ensemble des variables propositionnelles qui interviennent dans F et $E(F)$ l'ensemble $SF(F) \setminus V(F)$. Pour toute sous-formule G de F on définit une nouvelle variable propositionnelle a_G (informellement, cette variable signifie "G est vraie"). On pose :

$$T(F) = a_F \wedge \bigwedge_{G \in E(F)} t(G)$$

où l'opérateur $t(.)$ est définit de la façon suivante :

- $t(\neg G) = (\neg a_{\neg G} \vee \neg a_G) \wedge (a_G \vee a_{\neg G})$
- $t(G \vee H) = (\neg a_{G \vee H} \vee a_G \vee a_H) \wedge (\neg a_G \vee a_{G \vee H}) \wedge (\neg a_H \vee a_{G \vee H})$

La formule $T(F)$ se nomme la transformée de Tseitin de F.

2. Construire la transformée de Tseitin de la formule $(p \vee \neg q)$.

3. a) Montrer que $\text{Card}(SF(F)) \leq 2|F| + 1$ et en déduire un majorant sur $\text{Card}(E(F))$ en fonction de $|F|$.

   b) Montrer que pour toute formule $G \in E(F)$ on a $|t(G)| \leq 9$.

   c) En déduire un majorant pour $|T(F)|$ linéaire en $|F|$.

4. Pour toutes formules G et H, montrer que :

$$t(\neg G) \equiv (a_{\neg G} \Leftrightarrow \neg a_G) \text{ et } t(G \vee H) \equiv (a_{G \vee H} \Leftrightarrow (a_G \vee a_H)).$$

5. Soit φ une valuation qui satisfait F. On note φ' la valuation telle que pour toute sous-formule $G \in SF(F)$, $\varphi'(a_G) = \varphi(G)$.

   a) Pour toute formule G, montrer que si $\neg G \in E(F)$, alors $\varphi'(t(\neg G)) = 1$.

   b) De même, si G et H sont des formules telles que $(G \vee H) \in E(F)$ montrer que $\varphi'(t(G \vee H)) = 1$.

   c) Calculer $\varphi'(T(F))$ en remarquant que l'on peut décomposer $T(F)$ de la façon suivante :

$$T(F) = a_F \wedge \left(\bigwedge_{\neg G \in E(F)} t(\neg G) \right) \wedge \left(\bigwedge_{G \vee H \in E(F)} t(G \vee H) \right).$$

6. Soit φ une valuation qui satisfait $T(F)$. On note φ' la valuation telle que pour tout $p \in V(F)$, $\varphi'(p) = \varphi(a_p)$.

a) Montrer que pour toute sous-formule G de F on a $\varphi'(G) = \varphi(a_G)$. On pourra procéder par induction sur l'ensemble des sous-formules de F.

b) Calculer $\varphi'(F)$.

7. Déduire des questions précédentes que F et $T(F)$ sont équisatisfiables.

8. Démontrer le théorème T pour les formules qui ne font intervenir que les connecteurs $\neg$ et $\vee$.

9. Démontrer le théorème T.

10. (Question hors barème) Que peut-on en déduire sur la difficulté relative des problèmes SAT et CNF-SAT ?