DM1 : Logique

A rendre pour le 17 septembre 2021 à 10h. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 *Le club écossais*

Il existe en Ecosse un club très fermé qui obéit aux règles suivantes :

(1) Tout membre non écossais porte des chaussettes rouges.

(2) Tout membre portant des chaussettes rouges porte un kilt.

(3) Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.

(4) Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.

(5) Tout membre qui porte un kilt est écossais et est marié.

(6) Tout membre écossais porte un kilt.

1. On note e la proposition "être écossais", c la proposition "porter des chaussettes rouges", k la proposition "porter un kilt", d la proposition "sortir le dimanche" et m la proposition "être marié". Traduire les règles du club en formules du calcul propositionnel.
2. En déduire une formule F traduisant le fait de pouvoir entrer au club.
3. Donner une forme normale conjonctive pour F.
4. Montrer que les règles du club sont si contraignantes qu'il ne peut accepter personne.

Exercice 2 *Systèmes complets de connecteurs*

On rappelle qu'un système de connecteurs C est complet si toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule ne faisant intervenir que des connecteurs de C (éventuellement zéro). On supposera dans tout l'exercice que l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P}$ utilisé est fini et contient au moins deux éléments. On note n le cardinal de $\mathcal{P}$.

1. Monter que le système de connecteurs $\{\vee, \wedge, \neg\}$ est complet.
2. Montrer que le système $\{\neg, \wedge\}$ est complet.
3. Qu'en est-il de $\{\neg, \vee\}$?
4. Et de $\{\neg, \Rightarrow\}$?
5. On définit le connecteur de Sheffer, aussi appelé barre de Sheffer ou connecteur NAND et noté $|$ par : $(p|q) = \neg(p \wedge q)$. Les questions suivantes visent à étudier le système de connecteurs $\{|\}$.
   a) Donner la table de vérité de la formule $(p|q)$.
   b) Donner la table de vérité de la formule $(p|p)$. En déduire que le connecteur $\neg$ peut être défini en n'utilisant que la barre de Scheffer.
   c) Trouver une formule équivalente à $p \vee q$ n'utilisant que la barre de Scheffer.
   d) En déduire que le système de connecteurs $\{|\}$ est complet.
6. On note $\oplus$ le connecteur XOR (eXclusive OR) défini par la table de vérité suivante :

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   a) Montrer que si $F = \perp, F = \top$ ou $F = p$ pour p une variable propositionnelle alors le nombre de valuations qui rendent F vraie est pair.

b) Si $F = G \oplus H$, on notera n_{TT} le nombre de valuations qui rendent G et H vraies en même temps, n_{TF} le nombre de valuations qui rendent G vraie mais H fausse, n_{FT} le nombre de valuations qui rendent G fausse mais H vraie et n_{FF} le nombre de valuations qui rendent à la fois G et H fausses. Montrer que si G et H sont chacune rendues vraies par un nombre pair de valuations alors F est rendue vraie par un nombre pair de valuations.

c) Déduire des questions précédentes que si F est une formule ne faisant intervenir que le connecteur $\oplus$ alors le nombre de modèles de F est pair.

d) Le système de connecteurs $\{\oplus\}$ est-il complet ?

e) La réponse à la question 6.d. reste-t-elle valable si $\mathrm{card}(\mathcal{P}) = 1$?