Colles logique

Exercice***

1. Donner, en développant le $\vee$, une FNC pour $F = (x_{1,0} \wedge x_{1,1}) \vee (x_{2,0} \wedge x_{2,1}) \vee (x_{3,0} \wedge x_{3,1})$.

2. Quelle est la taille de F ? Et la taille de la FNC que vous avez trouvée pour F ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $F_n = (x_{1,0} \wedge x_{1,1}) \vee ... \vee (x_{n,0} \wedge x_{n,1})$.

   a) Quelle est la taille de F_n ?
   b) Montrer par récurrence que $G_n = \bigwedge\limits_{f:[\![1,n]\!]\mapsto\{0,1\}} (x_{1,f(1)} \vee x_{2,f(2)} \vee ... \vee x_{n,f(n)})$ est une FNC pour F_n.
   c) Combien y a-t-il de fonctions allant de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0, 1\}$?
   d) En déduire le nombre de connecteurs $\wedge$ dans G_n ainsi que le nombre de connecteurs $\vee$ dans G_n.
   e) Quelle est la taille de G_n ?
   f) Comparer les tailles de F_n et de G_n et commentez.

Exercice*
On considère la formule $F = q \wedge (\neg r \vee (\neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)))$.

1. Donner l'arbre syntaxique de F.

2. Enumérer les sous-formules de F.

3. Par l'algorithme de Quine, indiquer si cette formule est satisfiable et donner son nombre de modèles.

Exercice**
On dit qu'une formule F est contingente si elle est satisfiable sans être une tautologie.

1. Les formules suivantes sont-elles contingentes ?

   a) $F = (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$.
   b) $G = (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$.

2. Soit F et G deux formules du calcul propositionnel. Que pensez vous des affirmations suivantes ?

   a) Si F est contingente alors $\neg F$ l'est aussi.
   b) Si F et G sont contingentes alors $F \vee G$ et $F \wedge G$ aussi.
   c) Si $F \vee G$ sont insatisfiables, alors F et G sont insatisfiables.
   d) Si $F \vee G$ est une tautologie alors F et G sont des tautologies.
   e) Si $F \vee G$ est une tautologie alors F est une tautologie ou G est une tautologie.

Exercice***
Dans cet exercice, on identifie l'ensemble $\{0, 1\}$ à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Exprimer les opérations $+$ et $\times$ à l'aide des connecteurs $\vee, \wedge, \neg$.

2. Exprimer les connecteurs $\vee, \wedge, \neg$ à l'aide des opérations $+, \times$.

3. Montrer qu'à toute formule du calcul propositionnelle F dont les variables sont $q_1, ..., q_n$, on peut associer un polynôme P à n indéterminées tel que pour toute valuation φ on a $\varphi(F) = P(\varphi(q_1), ..., \varphi(q_n))$.

4. En déduire une méthode permettant de tester l'équivalence de deux formules. Commenter.

Exercice*
On considère l'ensemble de formules du calcul propositionnel $\Gamma = \{s \vee p \vee r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow r\}$.

1. L'ensemble Γ est-il satisfiable ? Combien a-t-il de modèles ?

2. La formule $s \Leftrightarrow r$ est-elle conséquence logique de Γ ? Même question pour la formule p puis la formule r.

Exercice*

On dispose de trois cases alignées numérotées 1, 2, 3 de gauche à droite et de trois pions; l'un carré, le deuxième rond, et le dernier trianglaire, qu'on peut placer dans ces cases.

1. Modéliser à l'aide de formules du calcul propositionnel les assertions suivantes (on précisera bien sûr la signification des variables propositionnelles introduites) :

   (1) Il y a un pion rond immédiatemment à droite d'un pion carré.

   (2) Chaque case contient un et un seul pion.

2. Donner les modèles de l'ensemble composé des deux formules précédentes. Que peut-on dire du contenu de la case 2 ?

Exercice***

Un ensemble de formule Γ est dit complet si et seulement si Γ est satisfiable et, pour toute formule F du calcul propositionnel, $\Gamma \models F$ ou $\Gamma \models \neg F$.

1. Montrer que Γ est complet si et seulement si il admet un seul modèle.
2. Donner un exemple d'un ensemble complet et d'un ensemble non complet.
3. Si φ est une valuation, on note $TH(\varphi)$ l'ensemble des formules satisfaites par φ. Montrer que pour toute valuation φ, $TH(\varphi)$ est complet.
4. Montrer que pour toute valuation φ, $\{F \,|\, TH(\varphi) \models F\} \subset TH(\varphi)$.
5. Donner un exemple d'ensemble complet qui n'est pas de la forme $TH(\varphi)$.

Exercice*

En utilisant une suite d'équivalences et en justifiant chaque étape en invoquant une équivalence classique vue en cours, simplifier au maximum la formule suivante :

$$F = ((q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)) \wedge \neg((\neg\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p))$$

Exercice**

Si C_0 et C_1 sont deux clauses disjonctives, on dit que C_1 inclut C_0 lorsque tout littéral de C_0 est aussi un littéral de C_1. Dans ce cas, on note $C_0 \ll C_1$.

1. Montrer que si $C_0 \ll C_1$ alors $C_0 \models C_1$.
2. La relation $\ll$ est-elle réflexive ? Est-elle transitive ?
3. Si $\mathcal{C}$ est un ensemble de clauses disjonctives dont on cherche à déterminer la satisfiabilité, montrer qu'on peut retirer de $\mathcal{C}$ toute clause C_1 telle qu'il existe une clause $C_0 \in \mathcal{C}$ vérifiant $C_0 \ll C_1$ sans encombre.

Exercice**

On considère le langage du premier ordre suivant : V est son ensemble de symboles de variables et vérifie $\{x, y, z\} \subset V$, $\sqsubseteq$ est un symbole de relation d'arité deux et f est un symbole de fonction d'arité un. Modélisez en logique du premier ordre les propriétés suivantes :

1. La relation $\sqsubseteq$ est antisymétrique.
2. La relation $\sqsubseteq$ est transitive.
3. x est la plus grande borne inférieure de y pour la relation $\sqsubseteq$.
4. La fonction f est injective.
5. La fonction f est surjective.

Exercice*

Montrer l'axiome suivant :

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

Exercice**

Bernard, Jacques et Sabine, prévenus de fraude fiscale, prêtent serment devant le juge d'instruction de la manière suivante :

(1) Bernard dit : "Jacques est coupable, mais Sabine est innocente".

(2) Jacques dit : "Si Bernard est coupable, alors Sabine aussi".

(3) Sabine dit : "Je suis innocente, mais au moins l'un des deux autres est coupable".

1. Transcrire chacun de ces témoignages par une formule du calcul propositionnel (on précisera la signification des variables).
2. En supposant que ces témoignages soient véridiques, qui est innocent et qui est coupable ?
3. Est-il plausible que les trois suspects aient menti ?
4. Un des témoignages n'est pas conséquence logique des deux autres. Lequel ?

Exercice*

1. Donner une forme normale disjonctive pour la formule $F = q \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$.
2. Donner une forme normale conjonctive pour la formule $G = (p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$.

Exercice*

Répondre aux questions suivantes en sachant que x, y, z sont des symboles de variables et que l'expression suivante est une formule du premier ordre :

$$F = \forall x\, \exists y\, f(g(x,y), a, z) \wedge \forall z\, f(x, g(x, Q(a)), z)$$

1. Pour chaque symbole dans F, dire si c'est un symbole de fonction ou un symbole de relation et donner son arité.
2. Déterminer l'ensemble des termes et des formules atomiques de F.
3. Pour chaque occurrence de variable dans F, indiquer si elle est libre ou liée ; dans le cas où elle est liée, préciser par quel quantificateur.

Exercice**

Un voyageur navigue dans l'archipel P à la recherche de l'île Maya. Les îles de cet archipel sont occupées par d'étranges habitants : les Pires, qui mentent systématiquement ; et les Purs, qui disent toujours la vérité. Sur chaque île, le voyageur rencontre deux habitants, A et B qui acceptent de lui parler. Dans chacun des cas suivants, modélisez les affirmations de A et B par des formules du calcul propositionnel et déduisez en si le voyageur est arrivé sur l'île Maya. Lorsque c'est possible, indiquez également la nature de A et B.

1. Première île :

   A : "B est un Pur et nous somme sur l'île Maya".
   B : "A est un Pire est nous sommes sur l'île Maya".

2. Deuxième île :

   A : "Nous sommes deux Pires, et nous sommes sur l'île Maya".
   B : L'un de nous au moins est un Pire, et nous ne sommes pas sur l'île Maya".

3. Troisième île

   A : "B est un Pur, ou nous sommes sur l'île Maya".
   B : "A est un Pire, ou nous sommes sur l'île Maya".

Exercice**

Si Γ est un ensemble de formules et F, G des formules du calcul propositionnel, démontrer les affirmations suivantes :

1. $\Gamma \models F$ si et seulement si $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \bot$.
2. $\Gamma \cup \{F\} \models G$ si et seulement si $\Gamma \models (F \Rightarrow G)$.

Exercice**

Si Γ est un ensemble de formules du calcul propositionnel, on note $\mathrm{Cons}(\Gamma)$ l'ensemble des formules qui sont conséquence logique de Γ et $\mathrm{mod}(\Gamma)$ l'ensemble des modèles de Γ. Si Σ et Γ sont deux ensembles de formules, que peut-on dire des affirmations suivantes ?

1. Si $\Sigma \subseteq \Gamma$ alors $\mathrm{mod}(\Gamma) \subseteq \mathrm{mod}(\Sigma)$.
2. Si $\Sigma \subseteq \Gamma$ alors $\mathrm{Cons}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Cons}(\Gamma)$.
3. $\Sigma \subseteq \mathrm{Cons}(\Sigma)$.
4. $\mathrm{mod}(\mathrm{Cons}(\Gamma)) = \mathrm{mod}(\Gamma)$.
5. $\mathrm{mod}(\Sigma) = \mathrm{mod}(\Gamma)$ si et seulement si $\mathrm{Cons}(\Sigma) = \mathrm{Cons}(\Gamma)$.
6. $\mathrm{Cons}(\mathrm{Cons}(\Gamma)) = \mathrm{Cons}(\Gamma)$.

Exercice**

Si Γ est un ensemble de formules du calcul propositionnel, on note $\mathrm{Cons}(\Gamma)$ l'ensemble des formules qui sont conséquence logique de Γ. Si Γ est un ensemble de formules et F une formule du calcul propositionnel, que peut-on dire des affirmations suivantes ?

1. L'ensemble des tautologies est inclus dans $\mathrm{Cons}(F)$.
2. Si F est une tautologie alors $\mathrm{Cons}(F)$ est exactement l'ensemble des tautologies.
3. Si F n'est pas satisfiable alors $\mathrm{Cons}(F)$ est l'ensemble des formules du calcul propositionnel.
4. Si F est une tautologie alors $\mathrm{Cons}(\Gamma \cup \{F\}) = \mathrm{Cons}(\Gamma)$.
5. Si F n'est pas satisfiable alors $\mathrm{Cons}(\Gamma \cup \{F\}) = \mathrm{Cons}(F)$.

Exercice**

Un inspecteur est envoyé enquêter dans plusieurs asiles de la région. Ces asiles ne contiennent que des médecins et des patients et chaque individu est soit complètement fou, soit sain d'esprit. Les individus sains d'esprit font tout à fait la différence entre le vrai et le faux tandis que les individus fous croient vraie toute affirmation fausse et fausse tout affirmation vraie. En supposant que tous les habitants des asiles sont sincères, modélisez par des formules du calcul propositionnel les situations suivantes et indiquez à l'inspecteur quelles sont les situations anormales :

1. Situation 1 : L'inspecteur recueille le témoignage de Pierre qui lui assure : "Je ne suis pas un médecin sain d'esprit".
2. Situation 2 : L'inspecteur interroge Alphonse et Barnabé ; ces derniers lui assurent les choses suivantes :
   (1) Alphonse : Barnabé est fou.
   (2) Barnabé : Alphonse est un médecin.
3. Situation 1 : L'inspecteur interroge Marie et Nathan ; ces derniers lui assurent les choses suivantes :
   (1) Marie : Nathan est un médecin.
   (2) Nathan : Marie est une patiente.