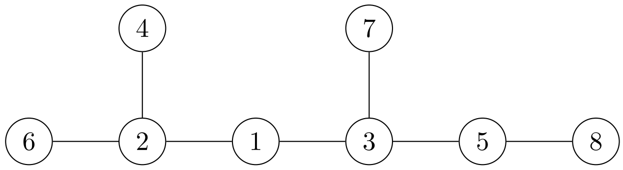
Colle 8 : graphes

Exercice 1

On considère un arbre $G = (S, A)$ dont les sommets sont numérotés de 1 à $n \geq 2$. Le codage de Prüfer de cet arbre est une suite finie de $n-2$ entiers de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ et on le calcule via l'algorithme suivant :

codage($G = (S, A)$) = //G est supposé être un arbre
  $L \leftarrow [\,]$
  Tant que $|S| > 2$
    $i \leftarrow \min s \in S \mid \deg(s) = 1$
    $j \leftarrow$ unique sommet de S auquel est relié i dans G
    Concaténer j en fin de L
    $S \leftarrow S \setminus \{i\}$
    $A \leftarrow A \setminus \{(i, j)\}$
  Renvoyer L

1. Expliquer pourquoi cet algorithme termine. Le codage de Prüfer d'un arbre est-il unique ?
2. Déterminer un codage de Prüfer pour l'arbre suivant :



3. Concevoir un algorithme permettant de reconstruire l'arbre correspondant à un codage de Prüfer donné.
4. A quel arbre correspond le code $(2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4)$?
5. Déterminer le nombre d'arbres à n noeuds numérotés de 1 à n différents qu'il est possible de construire.

Exercice 2

1. Décrire et analyser la complexité d'un algorithme permettant de calculer la transposée d'un graphe lorsqu'il est représenté par une matrice d'adjacence.
2. On propose d'utiliser le type graphe suivant en Ocaml

```
type graphe = {ordre : int ; aretes : int list array}
```

   Ecrire une fonction transpose en Ocaml permettant de calculer la transposée d'un graphe ainsi représenté.
3. Quelle est la complexité de la fonction transpose ? En termes de complexité temporelle, vaut-il mieux transposer un graphe représenté par listes d'adjacence ou par matrice d'adjacence ?

Exercice 3

On considère un graphe non orienté $G = (S, A)$. Pour tout sommet $v \in S$, on note $V(s)$ l'ensemble des voisins de s dans G. On considère à présent l'algorithme suivant.

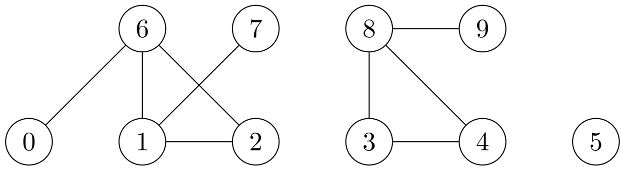
alpha($G = (S, A)$) =
  Si $A = \emptyset$, renvoyer $|S|$
  Sinon
    Choisir un sommet $s \in S$ de degré non nul
    $p \leftarrow$ alpha(G $\setminus \{s\}$)
    $q \leftarrow$ alpha(G $\setminus (\{s\} \cup V(s))$)
    Renvoyer $\max(p, q+1)$

1. G est un graphe non orienté à n sommets. Que renvoie la fonction alpha si G est un graphe sans arête ? Si G est un graphe complet ? Si G est un arbre dégénéré ? Si G est un cycle ?
2. Un stable du graphe $G = (S, A)$ est un sous ensemble de S dans lequel ne figure aucun couple de voisins. Prouver rigoureusement que la fonction alpha calcule le cardinal maximal d'un stable de G.
3. Etudier la complexité pire cas de la fonction alpha.

Exercice 4

Si $G = (s, A)$ est un graphe non orienté à k composantes connexes, le nombre cyclomatique de G, est l'entier naturel $c(G) = |A| - |S| + k$.

1. Déterminer le nombre cyclomatique du graphe ci-dessous :



2. Déterminer le nombre cyclomatique d'un arbre.
3. Que peut-on dire du nombre cyclomatique d'un graphe acyclique ? Prouvez le.
4. La réciproque de la propriété montrée à la question 3 est-elle vraie ?

Exercice 5

On rappelle qu'un graphe non orienté est dit eulérien s'il contient un cycle eulérien, c'est-à-dire un cycle qui emprunte une et une seule fois chaque arête du graphe. Un graphe non orienté est dit hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un cycle qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe (le sommet de départ-arrivée est compté une seule fois).

1. Proposer un exemple de graphe d'ordre au moins 5, qui soit :
   a) hamiltonien et eulérien
   b) hamiltonien et non eulérien
   c) non hamiltonien et eulérien
   d) non hamiltonien et non eulérien

On se donne un graphe simple non orienté G à $n \geq 3$ sommets dont chaque sommet est de degré au moins $n/2$.

2. Le graphe G est-il connexe ?
3. Montrer que le graphe G est nécessairement hamiltonien.

Exercice 6

1. Montrer qu'un graphe orienté G est fortement connexe si et seulement si G est connexe et tout arc de G fait partie d'un circuit.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remplace la condition de droite pas : G est connexe et tout sommet de G fait partie d'un circuit ?

Exercice 7

Si G est un graphe non orienté, on appelle chaîne hamiltonienne dans G tout chemin dans G passant une et une seule fois par chaque sommet et cycle hamiltonien toute chaîne hamiltonienne dont l'origine et l'arrivée sont reliées dans G. Un graphe possédant un cycle hamiltonien est dit hamiltonien.

1. Le graphe complet à n sommets est-il hamiltonien ?

On considère un graphe simple non orienté $G = (S, A)$ ayant $n \geq 3$ sommets et tel que pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ non adjacents dans G, $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Supposons que G est non hamiltonien.

2. Montrer qu'il existe un graphe $H = (S', A')$ tel que $S = S'$, $A \subset A'$, H est non hamiltonien mais rajouter une arête à H le rend hamiltonien.
3. Montrer que ce graphe H possède une chaîne hamiltonienne, qu'on note $(s_1, ..., s_n)$.
4. Montrer qu'il existe $1 < i < n$ tel que $(s_1, s_i) \in A$ et $(s_{i-1}, s_n) \in A$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 8

Une k-coloration du graphe non orienté $G = (S, A)$ est une application $c : S \to [\![0, k-1]\!]$ telle que $(u, v) \in A \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. On cherche à déterminer si un graphe admet une 2-coloration.

1. Montrer que si G est connexe et s est un sommet quelconque de G alors il existe au plus une 2-coloration c de G telle que $c(s) = 0$.

On introduit le type graphe : `type graphe = {ordre : int ; aretes : int list array}`.

2. Ecrire une fonction `deux_coloration : graphe -> int array option` qui renvoit `Some c` où `c` est une 2-coloration du graphe passé en argument s'il y en a une et `None` sinon.

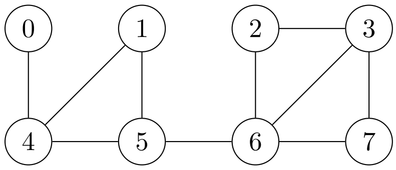
Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit entier k tel qu'il en existe une bonne k-coloration. On considère le graphe $G_{\mathbb{N}}$ dont les sommets sont les éléments de $\mathbb{N}^\star$ et dans lequel a et b sont reliés si et seulement si $a + b$ est premier.

3. Quel est le nombre chromatique de $G_{\mathbb{N}}$?

Exercice 10

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Un sommet $s \in S$ s'appelle un point d'articulation de G si le graphe induit par la suppression de s dans G (c'est à dire le graphe dans lequel on supprime s et toute les arêtes incidente à s) a plus de composantes connexes que G.

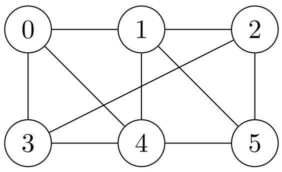
1. Quels sont les points d'articulation dans le graphe suivant ?



2. Montrer qu'un graphe complet (à plus de deux sommets) n'a pas de point d'articulation.

On suppose à présent que $G = (S, A)$ est connexe. Un ensemble d'articulation est un sous ensemble S' de S si le graphe induit par la suppression de tous les sommets de S' n'est plus connexe.

3. Déterminer un ensemble d'articulation le plus petit possible pour le graphe suivant.



4. Montrer que tout graphe connexe non complet admet un ensemble d'articulation.

On note $\kappa(G)$ le nombre minimal de sommets que l'on doit enlever à G pour obtenir soit un graphe connexe, soit un graphe à un seul sommet.

5. Montrer que $\kappa(G) = n - 1$ si et seulement si G est le graphe complet à n sommets.

6. Si $\kappa(G) = 0$, que peut-on dire sur G ?

Exercice 11

1. Montrer que si x et y sont deux réels alors $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

On appelle *ensemble de sommets indépendants* dans un graphe G un sous ensemble I des sommets de G tel que pour tout $(u, v) \in I^2$, les sommets u et v ne sont pas reliés par une arête dans G. On considère dans la suite un graphe $G = (S, A)$ simple, non orienté et ne contenant aucun cycle de longueur 3 et I un ensemble de sommets indépendants dans G de taille maximale égale à x.

2. Montrer que pour tout sommet $s \in S$, $\deg(s) \leq x$.
3. Montrer que $|A| \leq \sum\limits_{s \in S \setminus I} \deg(s)$.
4. En déduire le théorème de Mantel : Un graphe G simple non orienté à n sommets ne contenant pas de trinagle ne possède pas plus de $n^2/4$ arêtes, avec égalité si et seulement si n est pair et G est le graphe biparti complet avec $n/2$ sommets dans chaque ensemble de la bipartition.

Exercice 12

Un graphe est planaire s'il est possible de le dessiner dans le plan sans que deux de ses arêtes se croisent. On admet que si $G = (S, A)$ est un graphe planaire alors $|A| \leq 3|S| - 6$. On rappelle par ailleurs qu'une k-coloration du graphe non orienté $G = (S, A)$ est une application $c : S \to [\![0, k-1]\!]$ telle que $(u, v) \in A \Rightarrow c(u) \neq c(v)$ et que le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit k tel qu'il en existe une k coloration.

1. Montrer que si G est un graphe simple connexe non orienté et planaire ayant un nombre fini de sommets alors G possède au moins un sommet de degré inférieur à 5.
2. Montrer que tout graphe planaire simple ayant un nombre fini de sommets a un nombre chromatique inférieur à 6.